Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Vectores en el plano: una propuesta didáctica para 4º de ESO

Vectors in the plane: a didactic proposal for 4º ESO

Autor:

David Motis Juvero

Director:

Rubén Vigara Benito

FACULTAD DE EDUCACÓN

2020

Índice

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

En el presente documento se desarrolla una secuencia didáctica en torno a los vectores en el plano. Esta secuencia va dirigida al alumnado de 4º de la ESO, concretamente, a la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Enseñanzas Académicas, una materia de opción dentro del bloque de asignaturas troncales.

Según el currículo oficial (Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo) esta parte de las matemáticas se encuentra dentro del Bloque 3, geometría. Los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que se corresponden con el objeto matemático vector son los siguientes:

Contenidos

Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores.

Criterios de evaluación

Crit.MAAC.3.3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.

Estándares de aprendizaje

Est.MAAC.3.3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores.

Est.MAAC.3.3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector.

Bosch y Gascón (1994) postulan que “toda actividad matemática se puede analizar como actividad de estudio de campos de problemas, actividad que se lleva a cabo mediante la producción y utilización de lo que llamamos técnicas matemáticas” (p. 314). Posteriormente señalan: “el estudio de campos de problemas (…) requiere la existencia de desarrollos teóricos y tecnológicos (…) cuya principal función es la de explicar, justificar y relacionar entre sí las técnicas manipuladas y los campos de problemas abordados” (p. 315). Es decir, consideran que la enseñanza de las matemáticas debe analizarse en términos de estudio de campos de problemas, técnicas matemáticas y teorías matemáticas asociadas. En el presente trabajo se van a desarrollar una serie de campos de problemas cuyo objetivo será introducir de forma justificada las técnicas que los alumnos deben aprender. Posteriormente, estas técnicas serán justificadas por las tecnologías (teorías matemáticas) construyendo así el conocimiento del alumnado.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

Para estudiar el estado actual de la enseñanza-aprendizaje de los vectores como objeto matemático se va a realizar un breve análisis de tres libros de texto de distintas editoriales. Tanto el apartado B.1 como el B.2 se basarán en este análisis. Los libros que se van a tomar como referencia son para el curso de 4º de ESO en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Enseñanzas Académicas y van a ser los siguientes:

- ANAYA (Colera, J., Oliveira, M. J., Gaztelu, I. y Colera, R., 2016)
- EDELVIVES (Carrasco, M. A., Martín, R., Ocaña, J. M., 2011)
- SANTILLANA (Almodóvar, J. A., Marín, S., Nieto, V., Sánchez, L.,2016)

B.1. Justificación escolar de los vectores en el plano

A continuación se va a estudiar cómo se introducen los vectores en cada una de las tres editoriales y cuál es la justificación que se da en cada caso. Hay que tener en cuenta que es en 4º de la ESO cuando se introducen por primera vez los vectores y la geometría analítica. Las justificaciones siguientes son el primer encuentro que los alumnos tienen con el objeto matemático vector.

La editorial ANAYA empieza la unidad con una breve introducción histórica en la que menciona a Descartes y Fermat como primeros desarrolladores de la geometría analítica. Posteriormente, define el vector como "*una flecha que va de un punto a otro*" e intenta mostrar su utilidad mediante la modelización de dos situaciones distintas. Da una primera idea intuitiva de suma de vectores mediante el ejemplo.

La editorial EDELVIVES empieza desarrollando la etimología de la palabra vector. Nos muestra una situación real en la que aparece una autovía para ejemplificar la diferencia entre dirección y sentido. En este caso no se intenta mostrar la utilidad de los vectores.

La editorial SANTILLANA presenta directamente actividades relacionadas con la geometría analítica como las de situar puntos en un plano e identificar y dibujar rectas. Después de estas actividades se menciona la analogía entre las coordenadas de un GPS y las de un vector con el objetivo de mostrar su utilidad.

En ninguno de los tres casos se presentan los vectores como una herramienta geométrica que surge de forma necesaria para la resolución de determinados problemas, más bien se presentan como un objeto ajeno a lo estudiado anteriormente.

B.2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías

En este apartado se van estudiar los campos de problemas que aparecen en cada libro, las técnicas que los resuelven y las tecnologías que justifican estas técnicas. Vamos a distinguir dos etiquetas distintas: CPE (campos de problemas escolares) y CEE (campos de ejercicios escolares). Para justificar este doble etiquetado es necesario recordar la diferencia entre problema y ejercicio. Entendemos por problema el enunciado donde se plantea una situación que debe ser modelizada y que, a su vez, implica una serie de técnicas las cuales permiten su resolución. Por otro lado, entendemos por ejercicio aquellos enunciados cuyo objetivo es la mera práctica de la técnica. Concluyendo, etiquetaremos con CEE a los campos cuyos enunciados se dirijan únicamente a la práctica de la técnica.

CEE1. Determinar vectores mediante dos puntos y representar gráficamente.

CEE2. Operar vectores.

CEE3. Posiciones relativas entre vectores.

CEE4 Determinar vectores mediante el cálculo de parámetros para que cumplan condiciones determinadas.

CEE5. Hallar el punto medio y el simétrico.

CPE1. Estudio de situaciones y figuras geométricas mediante el uso de vectores.

Estos campos son las líneas generales que comparten las tres editoriales, la editorial EDELVIVES incluye un campo de ejercicios que no está presente en las otras dos:

CEE6. Estudio de bases vectoriales.

A continuación se van a desarrollar las técnicas y tecnologías asociadas a cada campo. Recordar que al hablar de técnicas nos referimos a los modelos matemáticos que hay que poner en práctica para resolver los campos de problemas, las tecnologías, por su parte, son las que describen y justifican las técnicas.

CEE1. Determinar vectores mediante dos puntos y representar gráficamente.

Los enunciados que se encuentran en las tres editoriales son similares, a modo de ejemplo adjuntamos la Imagen 1.

42 Representa en un eje de coordenadas los siguientes vectores.

a) El vector cuyo origen es el punto $A(2, 1)$ y su extremo es $B(1, 5)$.

b) El vector cuyo origen es el punto $C(1, 1)$ y su extremo es $D(3, -2)$.

c) El vector cuyo origen es el punto $E(-1, -3)$ y su extremo es $F(-2, 2)$.

d) El vector cuyo origen es el punto $G(-4, -3)$ y su extremo es $H(-1, -2)$.

Imagen 1, Enunciado extraído de SANTILLANA, p. 170.

La técnica que ofrecen los libros para resolver este campo de problemas es la siguiente: "*Las coordenadas de un vector se calculan restando las coordenadas del extremo menos las del origen*", es decir:

$$Sean\ A(a_x, a_y)\ y\ B(b_x, b_y)\ \ tenemos\ \overrightarrow{AB} = (b_x - a_x,\ b_y - a_y).$$

En ninguno de los dos libros aparecen tecnologías que justifiquen esta técnica. Respecto a la representación gráfica, a pesar de que se pide en numerosas ocasiones, en ninguno de los tres libros se explica de forma explícita cómo se debe llevar a cabo. Se entiende que los alumnos saben situar puntos en el plano coordenado y, consecuentemente, vectores.

CEE2. Operar vectores

Podemos dividir este apartado en tres tal y como sigue. Los enunciados son similares para las tres editoriales.

<u>Calcular el módulo de un vector</u>

7. Halla el módulo de los vectores que tienen como origen el punto A y como extremo el punto B:

a) A (1 , 4) y B (3 , 7)
c) A (– 2 , 5) y B (– 1 , 6)
b) A (6 , – 3) y B (– 5 , 7)
d) A (0 , – 6) y B (8 , 0)

Imagen 2, enunciado extraído de EDELVIVES, p. 185.

La técnica que resuelve este enunciado (combinada con la anterior) es la expresión $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ Las editoriales ANAYA y EDELVIVES justifican esta técnica mediante el teorema de Pitágoras. SANTILLANA no ofrece ninguna justificación.

Suma, resta y producto vector-escalar:

Piensa y practica

1. a) Representa los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, siendo $A(1, 3)$, $B(4, 5)$ y $C(6, -2)$. Halla sus coordenadas.

b) Representa $\vec{u} + \vec{v}$ y halla sus coordenadas.

c) Representa $3\vec{u}$, $-2\vec{u}$ y $0\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

d) Representa y halla las coordenadas del vector:

$$3\vec{u} - 4\vec{v}$$

Imagen 3, extraída de ANAYA, p. 167.

Las técnicas que resuelven este problema son dos, por un lado tenemos la multiplicación por un escalar, definida como $k\vec{v} = (kv_x, kv_y)$. La justificación que se da en los tres libros es de carácter gráfico, similar a la Imagen 4.

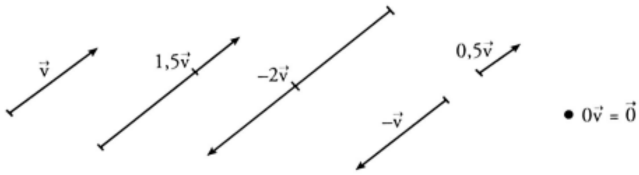


Imagen 4, extraída de ANAYA, p. 167.

Por otro lado, tenemos la técnica asociada a las sumas y restas:

$$\vec{v} \pm \vec{u} = (v_x \pm u_x, v_y \pm u_y).$$

La justificación que se da en los tres libros es gráfica, similar a la Imagen 5.

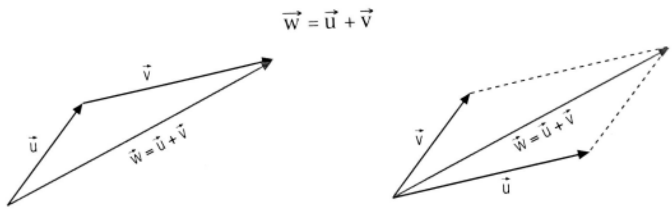


Imagen 5, extraída de EDELVIVES, p. 172.

Producto escalar entre vectores: Esta técnica es exclusiva de la editorial EDELVIVES, donde se introduce sin una justificación. Se incluye en ejercicios similares al que aparece en la Imagen 3, añadiendo, además de las operaciones suma y multiplicación por un escalar, el producto escalar, tal y como se muestra en la Imagen 6.

8. Realiza las operaciones $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{CD}$, $2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ y $5\,\overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{DA})$ con los vectores originados por los siguientes puntos:

a) A (6 , 7), B (−2 , 5), C (3 , 1) y D (−9 , −4)

b) A (8 , −4), B (1 , 5), C (7 , −2) y D (3 , −8)

c) A (−8 , 9), B (2, −12), C (4 , 5) y D (−15 , −14)

Imagen 6, extraída de EDELVIVES, p. 174.

CEE3. Posiciones relativas entre vectores

Las técnicas para resolver estos problemas se reducen a las condiciones de paralelismo y perpendicularidad. Los enunciados que aparecen son similares en las tres editoriales y son como el que aparece en Imagen 7:

63 Determina si los siguientes pares de vectores son paralelos o perpendiculares.

a) $\vec{a} = (1, 1)$ y $\vec{b} = (1, -1)$

b) $\vec{b} = (-2, 1)$ y $\vec{c} = (4, -2)$

c) $\vec{e} = (3, 1)$ y $\vec{f} = (1, -3)$

d) $\vec{g} = (8, 4)$ y $\vec{b} = (2, 1)$

Imagen 7, extraída de SANTILLANA, p.171.

<u>Paralelismo</u>: La justificación que se da para ver si dos vectores son paralelos es que sean proporcionales. Las técnicas son las asociadas a los temas de proporcionalidad, por ejemplo: $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ son paralelos si $u_x/v_x = u_y/v_y$.

<u>Perpendicularidad:</u> Este tema es más delicado, la técnica que ofrece EDELVIVES es computar el producto escalar, justificando que este producto, al contener el factor coseno, será nulo cuando los vectores sean perpendiculares. La editorial SANTILLANA indica que dos vectores serán perpendiculares cuando se cumpla $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y = 0$, sin definir el producto escalar ni dar justificación alguna. Por otro lado, la editorial ANAYA no ofrece ninguna técnica relacionada con el producto escalar.

Otra técnica que utilizan los tres libros para la condición de perpendicularidad es la siguiente: Los vectores de coordenadas (a, b) y $(-b, a)$ son perpendiculares. La editorial ANAYA justifica esta técnica mediante la representación grafica. Las otras dos editoriales no ofrecen justificación.

A este campo de problemas hay que añadir la condición de <u>igualdad</u>, las tres editoriales indican que dos vectores son iguales si son paralelos, su módulo es igual y tienen la misma dirección y sentido. Para el cálculo del módulo se utiliza la técnica vista anteriormente.

CEE4. Determinar vectores mediante el cálculo de parámetros para que cumplan condiciones determinadas

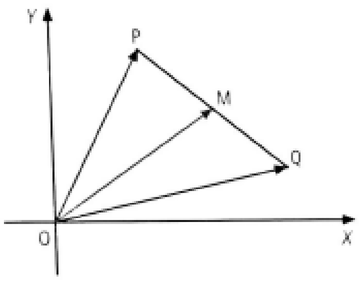
Estos problemas se resuelven mediante las técnicas anteriores añadiendo técnicas algebraicas. Uno podría pensar que este campo sería más de problemas que de ejercicios, sin embargo, la forma de plantear los enunciados hace decantarse por campo de ejercicios. Los problemas en las tres editoriales son del estilo "*Sean* $\vec{u} = (m, 4)$ *y* $\vec{v} = (5,2)$ *calcula* m *para que* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *sean paralelos",* problema que implica conocer las técnicas que resuelven un ejercicio de posiciones relativas y técnicas algebraicas para calcular m.

CEE5. Hallar el punto medio y el simétrico.

En las tres editoriales se pregunta por el cálculo del punto medio y el simétrico. Los enunciados preguntan explícitamente *"Halla el punto medio entre los puntos A y B".* Las editoriales ANAYA y EDELVIVES ofrecen la siguiente técnica: *"Las coordenadas del punto medio M de un segmento AB son la semisuma de las coordenadas de sus extremos",* es decir:

$$M = \left(\frac{a_x + b_x}{2}, \frac{a_y + b_y}{2}\right)$$

Ambas editoriales ofrecen justificaciones similares a la que se adjunta en la Imagen 8.



8.2. Punto medio de un segmento

Sea el segmento que tiene como extremos los puntos P y Q, cuyo punto medio es M, y consideremos los vectores de posición de estos puntos, como muestra la figura del margen. En dicha figura se puede apreciar que se verifica la relación:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$$

Como además $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$, tenemos:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$$

Si consideramos los puntos P (x_1, y_1), Q (x_2, y_2) y M (x_m, y_m), se obtiene que:

$$(x_m, y_m) = \frac{1}{2}(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

Es decir, las coordenadas del punto medio son:

$$x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Imagen 8, extraída de EDELVIVES, p. 180.

Por otro lado, la editorial SANTILLANA ofrece la siguiente técnica: "*El punto medio de un segmento* $\overline{AB}$ *se calcula sumando al punto* A *la mitad del vector* $\overrightarrow{AB}$*"*, es decir:

$$M = A + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$$

Esta editorial incluye un esquema gráfico para justificar la técnica. Las preguntas sobre el punto simétrico también son explícitas y la técnica que las resuelve es una ligera variación de la que se utiliza para el cálculo del punto medio.

CP1. Estudio de situaciones y figuras geométricas mediante el uso de vectores

Esta es la primera vez que los libros plantean problemas, es decir, sus enunciados no indican explícitamente que se utilice una técnica determinada. Estos problemas se resuelven utilizando todas las técnicas vistas anteriormente (o una selección de estas). Se adjuntan en Imagen 9, a modo de ejemplo, un problema pertenecientes a CP1.

77 Obtén el punto tangente de dos circunferencias del mismo radio cuyos centros son $A(2, 1)$ y $B(4, -3)$, respectivamente.

Imagen 9, extraída de SANTILLANA, p. 172.

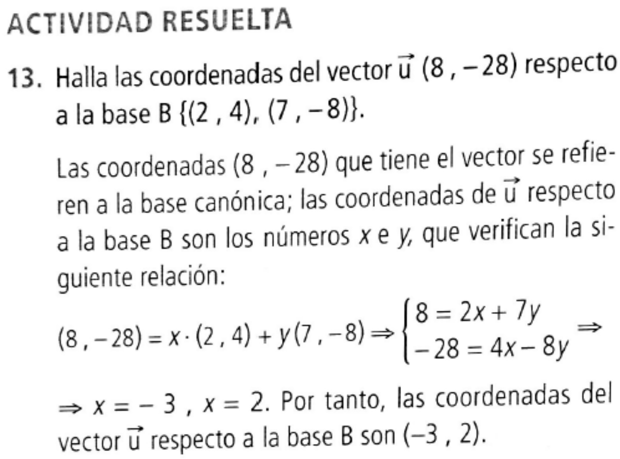
En estos dos problemas se está preguntando de forma implícita por la técnica del punto medio. Como este enunciado, podemos encontrar otros que implican técnicas diferentes.

CEE6. Estudio de bases vectoriales

Este último campo de ejercicios solo lo incluye la editorial EDELVIVES y puede dividirse en dos. Por un lado, encontramos enunciados del estilo "*Comprueba si los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *forman base*", y por otro, encontramos enunciados de cálculo de coordenadas respecto a una base como el que aparece en la Imagen 10, extraída de EDELVIVES, p. 185.

Comprobar si dos vectores forman una base: la editorial EDELVIVES sintetiza la técnica que resuelve este tipo de problemas en la siguiente frase: "*una base del espacio vectorial de dos vectores libres está formada por dos vectores que no son nulos ni paralelos*", es decir, se debe comprobar que los vectores no sean nulos ni paralelos (con las técnicas del CEE3). No se da justificación de por qué este par de vectores forman una base.

Cambios de base: la técnica que indica el libro para la resolución de este tipo de problemas es puramente algebraica, y además no se ofrece ninguna justificación. Se muestra en Imagen 10.



ACTIVIDAD RESUELTA

13. Halla las coordenadas del vector $\vec{u}$ $(8\,,-28)$ respecto a la base B $\{(2\,,4),\,(7\,,-8)\}$.

Las coordenadas $(8\,,-28)$ que tiene el vector se refieren a la base canónica; las coordenadas de $\vec{u}$ respecto a la base B son los números x e y, que verifican la siguiente relación:

$$(8\,,-28) = x\cdot(2\,,4) + y(7\,,-8) \Rightarrow \begin{cases} 8 = 2x + 7y \\ -28 = 4x - 8y \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = -3\,,\ x = 2$. Por tanto, las coordenadas del vector $\vec{u}$ respecto a la base B son $(-3\,,2)$.

Imagen 10, extraída de EDELVIVES, p. 185.

B.3. Efectos sobre el aprendizaje del alumno

El primer aspecto a destacar son las escasas razones de ser que se le dan al objeto vector en su introducción (nulas en el caso de EDELVIVIES y SANTILLANA). También se da una acusada escisión temática, es decir, las editoriales presentan el vector como un objeto ajeno a lo visto hasta el momento. Gascón (2003) llama a este fenómeno “autismo temático” y considera que es una de las principales causas de la desaparición de las razones de ser escolares de la geometría analítica.

Por otro lado, las tres editoriales siguen la misma línea metodológica, se presenta una nueva técnica y se pasa a su práctica algorítmica. Gascón (2001) nombra esta metodología como *docencia tecnicista*, e indica que “el tecnicismo corre el peligro de caer en una apología del dominio de las técnicas (…) hasta el punto de tomarlas como objetivo último del proceso didáctico” (p. 136). Es decir, se confunde la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas con la enseñanza-aprendizaje de técnicas. El tecnicismo tiende a olvidar los “auténticos” problemas, esos cuya dificultad principal consiste en escoger las técnicas adecuadas para construir una estrategia de resolución.

Este enfoque deja de lado la resolución de problemas, se tiende a presentarlos de forma aislada sin ninguna conexión con el sistema a partir del cual se construye el conocimiento matemático. El alumno acaba concibiendo los problemas como algo ajeno al proceso de aprendizaje y mecanizando la actividad matemática.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

Todos los conocimientos relacionados con geometría serán de ayuda para afrontar el aprendizaje de los vectores en el plano. Además, conceptos pertenecientes a otros bloques como el de proporcionalidad o la resolución de ecuaciones también serán necesarios. Destacamos en concreto los siguientes conocimientos:

- Saber situar puntos en un plano coordenado.
- Conocimiento general sobre figuras planas.
- Teorema de Pitágoras.
- Proporcionalidad.
- Nociones de trigonometría (teorema del coseno).
- Resolución de ecuaciones (primer y segundo grado).

A excepción de la trigonometría, todos estos contenidos aparecen en el currículo oficial de Aragón para 3º de la ESO, por tanto, los alumnos deberían conocerlos. Será necesario abordar todo lo referente a la trigonometría de 4º de ESO antes de iniciarse en el estudio de los vectores en el plano.

En esta sección se van a proponer una serie de actividades introductorias que servirán tanto para que los alumnos recuerden conceptos como para que el docente tome conciencia de los conocimientos que poseen. El fin de estas actividades no es adquirir nuevos conocimientos

C.1 Actividades introductorias (AI)

AI1. "Hundir la flota"

En esta actividad se simula el clásico juego "hundir la flota", siendo el objetivo principal que los alumnos repasen y practiquen cómo situar puntos en el plano coordenado. Las instrucciones son las siguientes:

Dibuja en tu tablero de juego el "barco 1" y el "barco 2" de la forma que creas más conveniente para que tu contrincante no los derribe. Los barcos tienen características diferentes:

Barco 1: Este barco está compuesto por dos unidades del tablero, solo se puede situar en posición horizontal o vertical.

Barco 2: Este barco está compuesto por cuatro unidades del tablero, solo se puede situar en posición horizontal o vertical.

Instrucciones del juego: Los jugadores irán diciendo puntos del tablero una vez cada uno, en caso de que un jugador acierte un "barco" repite jugada. Para derribar un barco hay que acertar todas las unidades que lo componen.

El tablero de juego es una cuadricula de 10 unidades cuadradas con un eje coordenado situado en el centro. En el anexo se adjunta una cuadricula ejemplo con los dos barcos situados en ella Esta actividad no será recogida por el docente.

AI2. Cuestionario geométrico

En este cuestionario se recogen una serie de preguntas de índole geométrica relacionadas con los conocimientos previos que el alumno debe poseer. Las preguntas hacen hincapié en las bases necesarias para afrontar los diferentes campos de problemas. El cuestionario ha sido diseñado con dos objetivos en mente, el primero, es repasar los conocimientos previos y reforzar (mediante intervención docente) los que sean necesarios. El segundo, es utilizar este cuestionario a modo de guía para el docente. Las clases se pueden adaptar en función de las soluciones de este cuestionario, trabajando detenidamente los campos de problemas que requieran conocimientos previos donde los alumnos tengan mayores dificultades (este podría ser el caso de la trigonometría, vista por primera vez en 4º de ESO)

El cuestionario se muestra en el anexo y en este caso las producciones de los alumnos sí serán recogidas. Una vez los alumnos hayan rellenado el cuestionario y se haya recogido, se abrirá un breve debate, orquestado por el docente, en torno a las preguntas que se han realizado.

C.2 Metodología para la implementación en el aula

Estas actividades están diseñadas para realizarlas en una misma sesión. Debido al carácter lúdico de AI1 se realizará en primer lugar AI2. Una vez finalizado el debate, los alumnos, por parejas, realizarán AI1. El docente deberá otorgar dos tableros a cada alumno, uno para situar sus "barcos" y otro para anotar los puntos que va diciendo a su compañero.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

D.1 Razones de ser a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático

Gascón (2002) concibe la actividad matemática como un proceso de modelización, extrapolando que la geometría debe enseñarse como un proceso de modelización geométrica. Entiende la *geometría sintética* como un proceso de modelización de situaciones relativas al espacio real (por ejemplo, problemas de construcción geométrica con "regla y compás"), por otro lado, entiende la *geometría analítica* como un proceso de modelización de la *geometría sintética*. Defiende que "son precisamente las limitaciones de las *técnicas sintéticas* las que dan sentido (son las razones de ser) a las *técnicas analíticas"* (p. 24).

Partiendo de esta premisa introduciremos los vectores como herramienta geométrica necesaria para resolver problemas de *geometría sintética*.

Otra razón de ser que se va a presentar es, según Zea (2012), la más antigua y responde a la necesidad de representar magnitudes físicas que necesitan ser expresadas mediante una dirección, un sentido y un módulo.

Podemos categorizar la primera razón de ser como *intra-matemática*, mientras que la segunda se puede categorizar como *extra-matemática*. Las razones de ser internas a las matemáticas (*intra-matemáticas*) justifican la introducción de un objeto mediante la resolución o modelizado de un problema puramente matemático. Las razones de ser externas (*extra-matemáticas*) surgen de forma natural al intentar modelizar fenómenos físicos, sociales, económicos, etc. y dotan de practicidad a los objetos matemáticos fuera de la propia disciplina.

D.2 Razones de ser históricas

Según Zea (2012) las primeras huellas de un tratamiento vectorial se encuentran a principios del siglo XVII, cuando la física exigió a la matemática la descripción cuantitativa del movimiento. En ese momento primaba la tradición explicativa aristotélica, y no se contaba con un aparato analítico para describir un fenómeno tan sencillo como la velocidad. Uno de los primeros pensadores que se propone este cometido es Galileo (1564-1642), quien empieza a utilizar diagramas de velocidad. Asimismo, se dio cuenta que de la trayectoria del movimiento parabólico se componía de un movimiento horizontal y otro vertical. Para describirlo era necesario combinar estos dos movimientos mediante una nueva operación "suma", la cual no se podía realizar por los medios convencionales; había necesidad de incorporar un nuevo método. A partir de aquí, se evidencia un momento histórico donde aparece la necesidad de constituir un nuevo campo teórico con sus nuevos entes denominados vectores.

Por otro lado, alejados de este contexto físico, Leibniz (1646-1716) sintió la necesidad de concebir técnicas algebraicas que sirvieran para analizar, interpretar y modelizar entidades geométricas. El álgebra, tal y como estaba constituida en ese entonces, no decía nada sobre la construcción de figuras geométricas. Posteriormente, Peacock (1791-1858) concibió un álgebra simbólica, una ciencia de símbolos sin interpretaciones y que cumplía ciertas operaciones básicas.

Finalmente, Hamilton (1805-1865) desarrolló su teoría de los cuaterniones que sirvió de base para el análisis vectorial tal y como lo conocemos.

Tras esta breve génesis vectorial podemos identificar dos razones de ser históricas:

(i) La matematización de fenómenos físicos tales como velocidades, fuerzas y aceleraciones.

(ii) El desarrollo del álgebra como disciplina abstracta que va acogiendo objetos no necesariamente con características numéricas.

D.3 Problemas para constituir las razones de ser del objeto.

En este apartado se proponen dos problemas. Se trata de dos problemas introductorios a través de los cuales los alumnos irán construyendo las razones de ser del objeto matemático vector, también servirán de primer encuentro con algunas propiedades.

Problema Introductorio 1 (PI1)

En la Imagen 11 se muestra el esquema de una "carrera". Los participantes deben elegir una de las posibles rutas, además, la selección de rutas se rige por una serie de normas:

1. *Una vez se empieza la ruta de un color debe mantenerse durante todo el recorrido.*
2. *Todas las rutas deben estar compuestas por 4 pasos.*

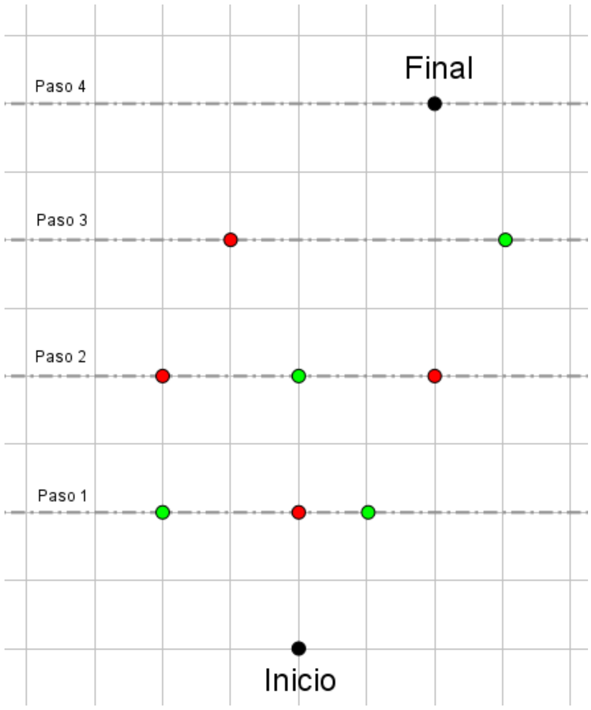


Imagen 11

Las preguntas que se plantean son las siguientes:

a) *Dibuja las posibles rutas y, mediante el uso de una regla, determina qué ruta es más corta.*
b) *Supón que cada cuadrado de la cuadrícula tiene un kilómetro de lado ¿Podrías determinar la ruta más corta sin usar la regla?*
c) *Imagina una situación en la que, en una cuadrícula de tamaño real, un compañero se sitúa en la posición de inicio y tú debes indicarle hacia donde moverse ¿Qué movimiento debe realizar tu compañero en el "Paso 1" para tomar la ruta más corta?¿Y en el paso 2?*
d) *Imagina ahora que cada vez que des instrucciones a tu compañero solo puedes decirle dos palabras, pero antes de empezar podéis decidir entre los dos vuestro código de comunicación. ¿Qué forma de comunicación utilizarías?*
e) *Diseña un objeto matemático que codifique toda la información del movimiento que debe realizar tu compañero.*
f) *Basándote en este objeto ¿en algún momento son paralelas la ruta roja y la verde?*

El objetivo de este problema es que los alumnos se encuentren ante la necesidad de crear un objeto matemático para codificar el movimiento que debe realizar su compañero. De esta premisa extraemos la idea de vector como "instrucciones de movimiento". De forma secundaria se tiene un primer encuentro con la técnica que permite calcular el módulo de un vector (apartado *b)*) y la noción de paralelismo.

La razón de ser que se trabaja mediante este problema es la del vector como herramienta geométrica. Nos permite calcular distancias, indicar posiciones, movimientos y estudiar el paralelismo entre trayectorias.

Problema Introductorio 2 (PI2)

Al viajar en canoa por un rio podemos distinguir tres situaciones distintas. En la primera, remamos a favor de la corriente. En la segunda, remamos en contra. En la tercera y última, remamos en dirección perpendicular a esta. El sentido de la corriente viene indicado por la flecha azul.

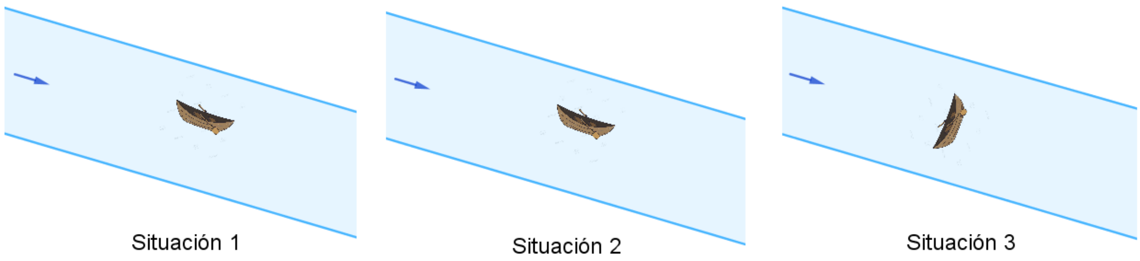


Imagen 12

Supondremos que la canoa (en ausencia de corriente) viaja a unos 15 km/h y que la corriente lo hace a unos 5 km/h. Responde a las siguientes preguntas:

a) *¿Cuál es la velocidad de la canoa en la situación 1? ¿Y en la situación 2? ¿Qué relación existe entre las operaciones que has efectuado y el sentido en el que viaja la canoa? Dibuja en las situaciones 1 y 2 el movimiento de la canoa teniendo en cuenta que las velocidades son distintas, es decir, que se pueda distinguir cuál viaja más rápido únicamente con el dibujo.*
b) *¿Puedes calcular la velocidad de la canoa en la situación 3? Dibuja en la imagen el movimiento que realizará.*
c) *Utiliza el objeto que has diseñado en el Problema Introductorio 1 para describir la velocidad de la canoa en la situación 3.*

El objetivo de este problema es tener un primer encuentro con las nociones de dirección, sentido y módulo a través de la representación gráfica. Además, se introducen varios conceptos intuitivos de suma y resta de vectores. En *a)* se pide reflexionar sobre la suma de vectores con igual dirección y sentidos opuestos, se espera que el alumno llegue a la solución intuitivamente. Posteriormente se pide que se representen las dos velocidades distintas, haciendo alusión a la relación que guarda el módulo del vector con la magnitud que representa. En el apartado *b)* se plantea la problemática de cómo sumar velocidades que llevan direcciones distintas, no se espera que los alumnos den con la solución pero sí que dibujen intuitivamente hacia donde se moverá la canoa. Por último, se pide que relacionen PI2 con PI1 mediante el objeto diseñado en PI1. Destacar que, a pesar de que sea lo más intuitivo, en ningún momento se pide que los alumnos dibujen "flechas" (vectores), deberán dibujar las magnitudes de la forma que crean más conveniente.

La razón de ser que se trabaja con este problema es la del vector como herramienta para representar magnitudes físicas. Se pone de manifiesto que las velocidades necesitan una dirección, un sentido y un módulo para estar totalmente caracterizadas.

D.4 Metodología a seguir en su implementación en el aula

Los problemas introductorios (PI1 y PI2) se realizarán en una misma sesión, el tiempo estimado para su resolución es de unos 35 min. Se formarán parejas y se repartirá una hoja con los dos problemas impresos. El papel del docente durante este tiempo será el de monitorizar las actividades e intervenir en las parejas que considere. Los últimos 15 minutos de clase el docente deberá solucionar las actividades e institucionalizar el vector como objeto matemático.

E. Sobre el campo de problemas

Esta sección va a estar dedicada a los campos de problemas. Como se ha mencionado en la introducción, la finalidad de los campos de problemas es introducir de forma justificada las técnicas que los resuelven. Con esta metodología se evita el esquema que plantean los libros de texto analizados en el apartado B, es decir, introducir un nuevo objeto matemático con sus técnicas asociadas y, posteriormente, pasar a la práctica de las mismas. Los campos de problemas que planteamos son los siguientes:

CP1: Representación e interpretación gráfica, dirección, sentido y módulo.

CP2. Determinar vectores.

CP3. Operaciones con vectores.

CP4. Punto medio.

CP5. Posiciones relativas, producto escalar y ángulo entre vectores.

CP6. Problemas finales.

Bosch y Gascón (1994) distinguen entre *estudio exploratorio* y *estudio profundizado* de un campo de problemas. El primero se da cuando el sujeto está poco familiarizado o desconoce las técnicas que resuelven el campo de problemas. Por otro lado, el segundo se fundamenta en el dominio y desarrollo de las técnicas manipuladas. En base a este planteamiento se ha desarrollado CP6, cuyo objetivo no es introducir ninguna técnica nueva sino que los alumnos apliquen el abanico de técnicas que han aprendido, propiciando el dominio y desarrollo de las mismas, tal y como indican Bosch y Gascón (1994). Asimismo, el resto de campos de problemas se corresponden con un estudio exploratorio.

E.1 Diseño de los campos de problemas

CP1: Representación e interpretación gráfica, dirección sentido y módulo

Este campo de problemas será el primero que se presente ante los alumnos y lo dividiremos esencialmente en dos. Vamos a diseñar un problema que se centre en la representación gráfica (P1.1) y otro que se centre en las propiedades de los vectores (P1.2), es decir, en su módulo dirección y sentido.

Problema 1.1 (P1.1)

El organizador de la "carrera" del PI1 ha decidido organizar una segunda edición. En este caso las rutas vienen determinadas de forma diferente, la ruta verde viene dibujada en la Imagen 13 mientras que la ruta roja está determinada por los vectores $\overrightarrow{p_1} = (3,1)$, $\overrightarrow{p_2} = (-2,3)$, $\overrightarrow{p_3} = (2,2)$ *y* $\overrightarrow{p_4} = (-1,1)$. *Estos vectores representan el movimiento que deben hacer los participantes en cada paso. Obtén los vectores* $\overrightarrow{p_1}'$, $\overrightarrow{p_2}'$, $\overrightarrow{p_3}'$ *y* $\overrightarrow{p_4}'$ *que determinan la ruta verde y dibuja la ruta roja.*

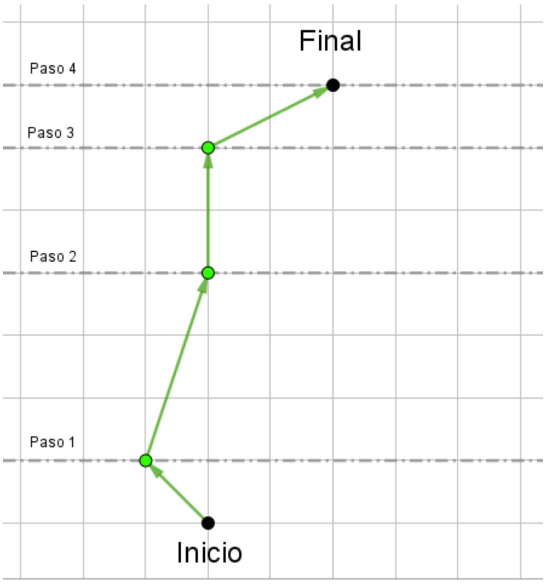


Imagen 13

El objetivo de este problema es que el alumnado construya la técnica para la representación gráfica. Se espera que sea capaz de interpretar el enunciado y dibujar los vectores de forma autónoma, pues guarda bastante similitud con la actividad de situar puntos en el plano.

Problema 1.2. (P1.2)

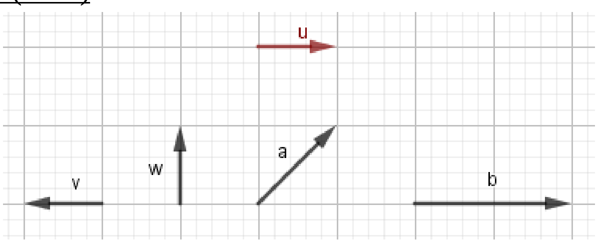


Imagen 14

Compara el vector $\vec{u}$ *con el vector* $\vec{v}$. *¿Qué similitudes y diferencias encuentras? Repite este proceso con los vectores* $\vec{w}$, $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$. *¿Eres capaz de hacer una lista con las propiedades que caracterizan un vector?*

El objetivo de este problema es el estudio de las propiedades de los vectores. Se espera que el alumnado sea de capaz de deducir que un vector viene caracterizado por una dirección un sentido y un módulo.

CP2. Determinar vectores

En este campo de problemas se introduce la técnica que permite calcular un vector dados dos puntos.

<u>Problema 2 (P2)</u>

Juan y María participan en una prueba de orientación. Para encontrar la "baliza 1" deciden separarse. Están situados de tal modo que Juan ve la "baliza 1" pero María no, si situamos a Juan en el origen de coordenadas la situación es la siguiente:

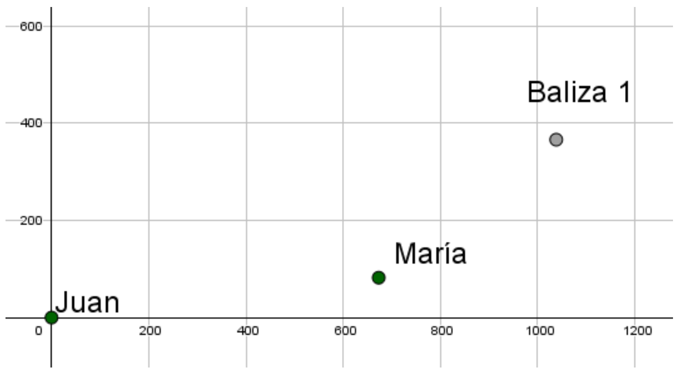


Imagen 15

María se encuentra en la posición (673m, 82m) y la "baliza 1"en la posición (1038m, 366m). Escribe (en forma de vector) las instrucciones de movimiento que debe darle Juan a María para que encuentre la "baliza 1".

El objetivo de este problema es que los alumnos busquen la técnica que permite calcular un vector a partir de dos puntos. El enunciado propuesto no permite ver a "simple vista" la respuesta, por tanto, se espera que los alumnos lleguen a la conclusión de que las instrucciones de movimiento que debe dar Juan son la resta de las coordenadas de la "baliza 1" menos las de María.

CP3. Operaciones con vectores

Problema 3.1 (P3.1)

Dado un triángulo de vértices $A(1,1), B(3,-1)$ *y* $C(4,2)$*, determina si es un triángulo equilátero, isósceles o escaleno. Utiliza una cuadrícula para esquematizar la situación. Repite el problema para el triángulo de vértices* $A'\left(\frac{7}{3},\frac{5}{4}\right), B'\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$ *y* $C'(1,3)$.

El objetivo de este problema es que los alumnos busquen una herramienta que les permita calcular los lados del triángulo, es decir, el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$. También implica la técnica que determina un vector a partir de dos puntos dados aunque este no es el objetivo principal. Se pretende que el alumno dibuje el triángulo en una cuadricula y que deduzca que el módulo del vector se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras. Se espera que resuelvan el primer triángulo sin el uso de vectores, ahora bien, al enfrentarse al segundo triángulo verán que no se puede representar gráficamente, por tanto, deberán utilizar la herramienta vector para hallar la solución. El primer triángulo servirá como referencia para deducir los pasos a seguir.

Problema 3.2 (P3.2)

Marta y Andrés estiran un carro de la compra en distintas direcciones y con distintas intensidades. Marta estira el carro en la dirección del eje Y con sentido positivo, Andrés estira en la dirección del eje X con sentido positivo. Marta estira del carro con una fuerza que es el doble que la de Andrés. ¿Hacia dónde se moverá el carro? La imagen que se adjunta a continuación representa un esquema de la situación.

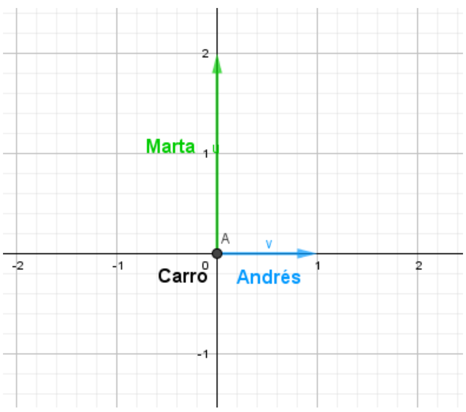


Imagen 16

El objetivo de este problema es que el alumnado explore la operación suma entre vectores. Se espera que, gracias al esquema gráfico que se adjunta, los alumnos tengan una idea intuitiva de hacia dónde se moverá el carro. Se puede indicar que esta situación es análoga a la que aparece en PI2, cuando la canoa se desplaza de forma perpendicular a la corriente.

CP4. Punto Medio

Problema 4 (P4)

Sean $A(0,3)$ y $B(2,1)$ los puntos diametralmente opuestos de una circunferencia ¿Cuál es su centro?

El objetivo de este problema es introducir la técnica que determina el punto medio entre dos dados. Se espera que los alumnos deduzcan rápidamente que la solución es el punto medio entre A y B. La dificultad de este problema radica en el cálculo del punto medio sin ninguna indicación previa. Se espera que el alumnado sea capaz de obtener la solución aunque será el docente el encargado de justificar los resultados y deducir la técnica apropiadamente.

CP5. Posiciones relativas, producto escalar y ángulo entre vectores

Problema 5.1 (P5.1)

Dados los puntos $A(1,1)$, $B(3,2)$ y $C(7,4)$ ¿Están alineados? ¿Y los puntos $A(1,1)$, $B(3,2)$ y $C'(6,4)$? Indica qué propiedades deben cumplir tres puntos para que estén alineados. ¿Podrías contestar a las preguntas anteriores sin representar los puntos gráficamente? Determina si los puntos $A'(1,1/3)$, $B'(3/5,2)$ y $C(7,4)$ están alineados.

El objetivo de este problema es introducir la noción de paralelismo en el alumnado, tres puntos están alineados si los vectores que los unen son paralelos. Se espera que el alumnado resuelva el problema gráficamente y que a partir de ahí deduzca la condición de alineación. El paso siguiente será buscar una técnica que les permita deducir si dos vectores son paralelos prescindiendo de la representación gráfica.

Problema 5.2 (P5.2)

Demuestra que el polígono formado por los puntos A, B, C y D es un cuadrado, indica en una lista los pasos que vas a seguir.

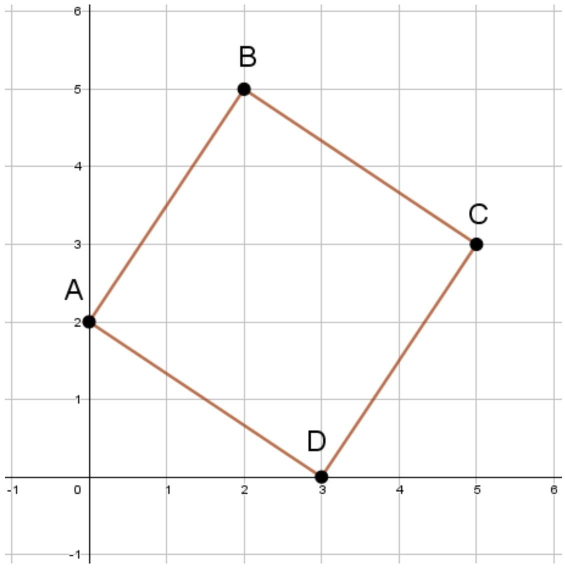


Imagen 17

Se espera que el alumnado plantee la lista de pasos a seguir correctamente; por un lado, comprobar que los cuatro lados son iguales, y, por otro, comprobar que un ángulo forma 90º. El primer paso no plantea dificultad, sin embargo, el segundo genera la necesidad de una técnica que nos permita calcular el ángulo entre dos vectores. Se abrirá un debate, orquestado por el docente, en torno a los criterios de perpendicularidad. Se esperan posibles respuestas como la de que un vector es perpendicular si sus coordenadas son (a, b) y $(-b, a)$. El objetivo no es encontrar un criterio riguroso sino invitar a la reflexión. Este primer encuentro con los criterios de perpendicularidad servirán para que el alumnado entienda la importancia y utilidad del producto escalar que se introduce en el siguiente problema.

Problema 5.3 (P5.3)

Calcula el valor del ángulo θ.

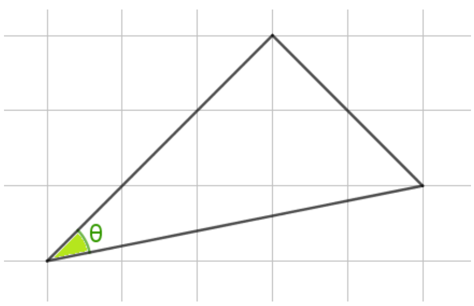


Imagen 18

Con el simple pero complejo enunciado de P5.3 se pretende que el alumnado calcule el ángulo θ de la forma que considere más conveniente. Se espera que los alumnos que lleguen a la solución lo hagan calculando la longitud de los lados y aplicando el teorema del coseno (recordado en las actividades introductorias). Este problema servirá para introducir el producto escalar, refleja su practicidad y sirve para construir la justificación de la técnica tal y como se verá más adelante.

CP6. Problemas finales

Este campo se centra en lo que Bosch y Gascón (1994) llaman *estudio profundo* de un campo de problemas y otorga una visión global al alumnado de la practicidad de los vectores como herramienta geométrica. El objetivo principal es que el alumnado domine y desarrolle el abanico de técnicas adquirido mediante los campos de problemas anteriores. Se plantean problemas que se resuelven elaborando estrategias de resolución que implican varias de las técnicas anteriores además de técnicas pertenecientes a otros bloques. A continuación presentamos dos problemas “del estilo” de los que componen CP6.

<u>Problema 6.1 (P6.1)</u>

Dados los puntos $A(1,0)$, $B(3,1)$ *y* $C(4,m)$ *determina el valor del parámetro* m *para que los tres puntos estén alineados.*

<u>Problema 6.2 (P6.2)</u>

Dado un cuadrilátero de vértices $A(1,0)$ $B(2,2)$, $C(4,1)$ *y* $D(5,-2)$ *comprueba que es un trapecio rectángulo (tiene dos lados paralelos y uno perpendicular a estos dos).*

E.2 Modificaciones de las técnicas iniciales para la resolución de los campos de problemas

Las técnicas que se utilizan para la resolución de los campos de problemas apenas sufren modificaciones respecto a las que presentan las distintas editoriales en el apartado B.2, la riqueza de estos campos de problemas reside presentar las técnicas como algo necesario para un fin, y no practicarlas de forma algorítmica sin contexto alguno. La única técnica que presentamos en esta secuencia didáctica que no aparece en los libros de texto es el cálculo del ángulo entre vectores, basado en el producto escalar. Las técnicas para el estudio de las posiciones relativas se modifican y reducen al producto escalar y al estudio del ángulo que forman los vectores problema. No obstante, a pesar de que se puede comprobar que dos vectores son paralelos computando el producto escalar, se ha introducido un campo de problemas referido únicamente estudio de la proporcionalidad entre coordenadas, pues considero esta técnica mucho mas intuitiva y rápida para comprobar si dos vectores son paralelos.

E.3 Implementación en el aula

Para la implementación en el aula de estos problemas distinguiremos esencialmente dos fases. En la primera fase el alumnado deberá resolver los problemas de forma individual mientras el docente monitoriza la actividad. Transcurrido el tiempo que se considere necesario iniciaremos la segunda fase. Esta segunda fase consistirá en organizar un debate en clase, siendo el docente quien lo orqueste. Se pondrán en común las ideas del alumnado de modo que el conjunto de la clase vaya construyendo el mismo conocimiento, y en los campos que sea posible, las propias técnicas. El objetivo de este debate es mostrar las diferentes interpretaciones que puede tener un mismo problema.

Siguiendo esta línea metodológica se podría incorporar una fase intermedia en la que el alumnado, ya sea por parejas o en pequeños grupos, comente los resultados y conclusiones obtenidos antes de pasar al debate global de toda la clase. Considero que esta fase intermedia sería conveniente en la totalidad de los campos de problemas, dependerá del docente observar y adecuarse a la situación, dependiendo del ambiente de trabajo y nivel de atención que se dé día a día.

F. Sobre las técnicas

En este apartado se van a presentar las técnicas que resuelven los campos de problemas anteriores. Además, a cada técnica le asociaremos un campo de ejercicios (enunciados cuyo objetivo es su práctica). Se va a presentar cada técnica por separado y, finalmente, se asociará cada una al campo de problemas que le corresponde.

F.1 Las técnicas

T1. Representación e interpretación gráfica de vectores

Para la representación e interpretación gráfica no se da una técnica como tal, pues tampoco es que exista una en concreto. Los alumnos deberán practicar este proceso guiados en primera instancia por el docente y, posteriormente, apoyados por las actividades realizadas en clase. Además, esta técnica se trabaja de forma implícita en la mayoría de los campos de problemas, siendo una parte fundamental de los procesos de razonamiento en lo referente al trabajo con vectores.

Ejercicios:

E1.1: *Representa gráficamente los siguientes vectores:*

a) $\vec{u} = (1, 4)$ b) $\vec{v} = (-2, 3)$

c) $\vec{w} = (0, -1)$ d) $\vec{a} = (-5, -2)$

E1.2: *Escribe la expresión que representa los siguientes vectores:*

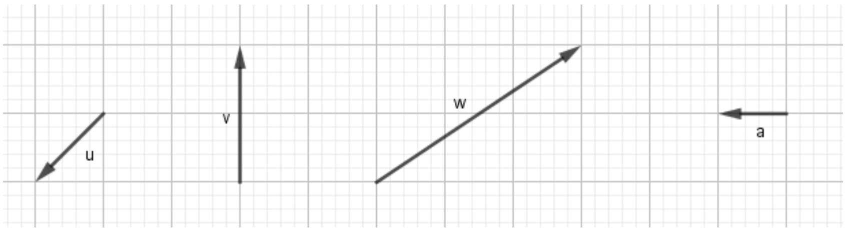


Imagen 19

T2. Obtención de un vector a partir de dos puntos

Las coordenadas de un vector se calculan restando las coordenadas del extremo menos las del origen: dados los puntos $A(a_x, a_y)$ y $B(b_x, b_y)$ tenemos

$$\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x,\ b_y - a_y).$$

Ejercicios

E2: *Dados los puntos A y B calcula el vector $\overrightarrow{AB}$ en cada caso:*

a) $A(2,2), B(-1,3)$ *b)* $A(-1,3),\ B(1,3)$

c) $A(2,-1), B(3,1)$ *d)* $A(-1,-3), B(-1,2)$

T3. Módulo de un vector

El módulo de un vector $\vec{u}$ viene dado por $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$.

Ejercicios

E3: *Calcula el módulo de los siguientes vectores:*

a) $\vec{u} = (1,4)$ *b)* $\vec{v} = (-2,3)$

c) $\vec{w} = (0,-1)$ *d)* $\vec{a} = (-5,-2)$

T4. Multiplicación por un escalar

La multiplicación por un escalar viene dada por $k\vec{u} = (ku_x, ku_y)$.

Ejercicios: Se van a incluir de forma implícita en E5.

T5. Suma y resta de vectores

La técnica correspondiente es: $\vec{v} \pm \vec{u} = (v_x \pm u_x, v_y \pm u_y)$,

Ejercicios

E5: *Sean los vectores* $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (-1,1)$ *y* $\vec{w} = (0, 1)$ *representa gráficamente los vectores que se obtienen de las siguientes operaciones:*

$a)\ 2\vec{u} + \vec{v}$ $\qquad b)\ \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

$c)\ \vec{u} + \vec{v} + 0\vec{w}$ $\qquad d)\ 3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$

T6. Punto medio

El punto medio entre dos dados viene dado por $M = \left(\frac{a_x+b_x}{2}, \frac{a_y+b_y}{2}\right)$.

Ejercicios

E6: *Calcula el punto medio de los puntos* A, B *en cada caso.*

a) $A(2,2), B(-1,3)$ *b)* $A(-1,3)$, $B(1,3)$

c) $A(2,-1), B(3,1)$ *d)* $A(-1,-3), B(-1,2)$

T7. Paralelismo

Para comprobar si dos vectores son paralelos debemos estudiar la proporcionalidad entre sus coordenadas. Dos vectores $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *son paralelos si* $u_x/v_x = u_y/v_y$.

Ejercicios

E7: *Comprueba si los siguientes pares de vectores son paralelos:*

$a)\ \vec{u} = (3,2), \vec{v} = (9,6)$ $\qquad b)\ \vec{u} = (1,1), \vec{v} = (2,6)$

$c)\ \vec{u} = (-2,1\ ), \vec{v} = (2,-1)$ $\qquad d)\ \vec{u} = (-1,1), \vec{v} = (-3,-2)$

T8. Producto escalar

El producto escalar entre dos vectores viene dado por $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\,\theta$, *donde* θ *es el ángulo que forman* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$.

Ejercicios

Para esta técnica se van a incluir dos campos de ejercicios, el primero irá referido al uso del producto escalar como una forma rápida de comprobar si dos vectores son perpendiculares, estudiando si $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y = 0$. En segundo lugar se presenta el producto escalar como una técnica para calcular el ángulo que forman dos vectores de modo que $\cos\theta = (u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y)/\ |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

E8.1: *Comprueba si los siguientes pares de vectores son perpendiculares:*

$a)\ \vec{u} = (3,-2), \vec{v} = (1,1)$ $\quad b)\ \vec{u} = (3,-2), \vec{v} = (2,\ 3)$

$c)\ \vec{u} = (-1,-1), \vec{v} = (-2,2)$ $\quad c)\ \vec{u} = (2,1), \vec{v} = (3,2)$

E8.2: *Calcula el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:*

$a)\ \vec{u} = (3,-2), \vec{v} = (1,1)$ $\quad b)\ \vec{u} = (3,-2), \vec{v} = (2,\ 3)$

$c)\ \vec{u} = (-2,1\ ), \vec{v} = (2,-1)$ $\quad d)\ \vec{u} = (-1,1), \vec{v} = (-3,-2)$

F.2 Resolución de los campos de problemas

A continuación se muestra una tabla con las técnicas que resuelven los problemas del apartado E. Distinguiremos entre técnica principal, cuando la finalidad del problema sea el uso de dicha técnica, y técnica secundaria, cuando la técnica aparezca como un paso intermedio para llegar a la técnica principal, para el CP6 no aplicamos este criterio pues, como se ha dicho anteriormente, su objetivo no es presentar una nueva técnica.

Campo de problemas	Problemas	Técnica principal	Técnica secundaria
CP1	P1.1	T1	
	P1.2		
CP2	P2	T2	
CP3	P3.1	T3	T2
	P3.2	T4, T5	
CP4	P4	T6	
CP5	P5.1	T7	T2
	P5.2		
	P5.3	T8	T2, T3
CP6	P6.1	T2, T7	
	P6.2	T2, T7, T8	

Tabla 1

Hacer notar que P1.2 y P5.2 no se le ha asociado ninguna técnica. P1.2 va dirigido a estudiar las propiedades de los vectores, módulo, dirección y sentido, por lo que no lo resuelve ninguna técnica. La finalidad de P5.2 es explorar los diferentes enfoques para estudiar la perpendicularidad, por lo que tampoco lo resuelve una técnica concreta.

F.3 Implementación en el aula

En este apartado encontramos dos situaciones en lo referente al proceso de enseñanza-aprendizaje. La primera es la enseñanza de la técnica mientras que la segunda es la práctica de la misma. Para plantear un esquema metodológico nos basaremos en el trabajo de Bosch y Gascón (1994).

Estos autores entienden por *momento* de estudio al “aspecto” o “dimensión” del proceso de estudio de un campo de problemas. Distinguen esencialmente tres:

- *Momento exploratorio*, siempre que un sujeto aborda un problema de un nuevo campo que conlleva utilizar técnicas diferentes a las habituales.
- *Momento de la técnica*, cuando el sujeto se somete a la práctica de la técnica subyacente a un campo de problemas.
- *Momento teórico*, etapa en la que predomina la descripción, justificación e interpretación de los distintos elementos que configuran las técnicas.

Además de distinguir estos tres momentos plantean la relación entre ellos del siguiente modo:

> La articulación funcional de estos tres momentos requiere que el momento de la técnica juegue el papel de momento integrador del proceso de estudio de campos de problemas, esto es, que aparezca como desarrollo natural del momento exploratorio y como fuente de nuevas necesidades teóricas. (Bosch y Gascón, 1994, p. 318)

En base a este supuesto teórico se desarrolla el esquema metodológico que se va a seguir a lo largo de las sesiones. El momento idóneo para enseñar la técnica es tras el estudio exploratorio del campo de problemas correspondiente, pues surge de forma natural. Enseñada la técnica, se resolverá el problema planteado mediante su aplicación, utilizándola de medio articulador para proseguir con la justificación teórica e institucionalización. Finalmente, añadiremos la práctica algorítmica de la técnica mediante los ejercicios propuestos en este apartado. Resumimos de forma esquemática:

1. Presentación y trabajo de los problemas pertenecientes a un campo concreto (siguiendo la metodología indicada en E.3).
2. Enseñanza de las técnicas que los resuelven y puesta en práctica.
3. Institucionalización de la técnica y justificación.

4. Práctica de la técnica mediante los ejercicios.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

G.1. Tecnologías

TG2. Justificación de T2 (vector entre dos puntos)

La primera técnica que se va a justificar es la que calcula el vector entre dos puntos. Esta técnica se justificará mediante el trabajo de P2, el razonamiento a seguir es geométrico, basado en la interpretación de la situación. El propio alumnado será el responsable de justificar la técnica mediante la resolución del mismo P2. Cuando se vean forzados a indicar el movimiento de María (desde el punto de vista de Juan), se darán cuenta de que la operación que deben hacer es la resta de las coordenadas de la baliza menos las de María.

TG3. Justificación de T3 (módulo de un vector)

El razonamiento para justificar la técnica que nos permite calcular el módulo de un vector es de nuevo geométrico y se basa en el teorema de Pitágoras.

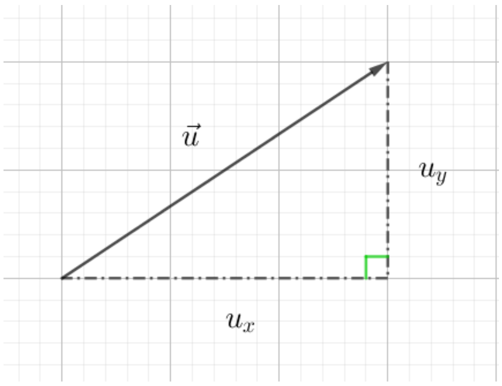


Imagen 20

De la Imagen 20 se deduce que $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. De nuevo se espera que el alumnado sea capaz de justificar esta técnica mediante la resolución del P3.1. Una vez se haya terminado la actividad el docente indicará que se ha utilizado T3 y pasará a la definición e institucionalización de la misma.

TG4. Justificación de T4 (multiplicación por un escalar)

Para justificar la multiplicación por un escalar se va a dar un razonamiento físico. Generaremos un pequeño debate lanzando las siguientes preguntas:

Una persona se mueve siguiendo el vector $\vec{v} = \left(2\frac{km}{h}, 3\frac{km}{h}\right)$. *Representa el vector y contesta a las siguientes preguntas:*

a) *Si la persona empieza a correr y duplica su velocidad ¿Varía el módulo? ¿Y la dirección? ¿Y el sentido? Representa el nuevo vector.*
b) *Si la persona decide reducir su velocidad a la mitad y cambiar de sentido ¿Varía el módulo? ¿Y la dirección? ¿Y el sentido? Representa el nuevo vector.*
c) *Ahora la persona decide pararse ¿Qué pasa con el vector velocidad?*

Tras discutir estas cuestiones el docente indicará que todas estas situaciones se pueden representar mediante T4, $k\vec{v} = (kv_x, kv_y)$, dando distintos valores a k. En este caso la justificación de la técnica es compartida, de modo que los alumnos la van construyendo pero son guiados por el docente. Un primer encuentro con T4 se da en P3.2, cuando se dice *"Marta estira del carro con una fuerza que es el doble que la de Andrés",* se espera que en este caso los alumnos representen una fuerza como el doble de la otra sin reflexionar sobre la cuestión, por ello, las preguntas anteriores se lanzarán tras haber trabajado P3.2.

TG5. Justificación de T5 (suma y resta de vectores)

El razonamiento para justificar T5 es geométrico y será el docente quien asuma la responsabilidad de esta justificación. El alumnado se encontrará con esta técnica en el P3.2, se espera que los alumnos obtengan el vector suma pero de una forma intuitiva, sin dar justificación a la técnica. Podemos justificar del siguiente modo:

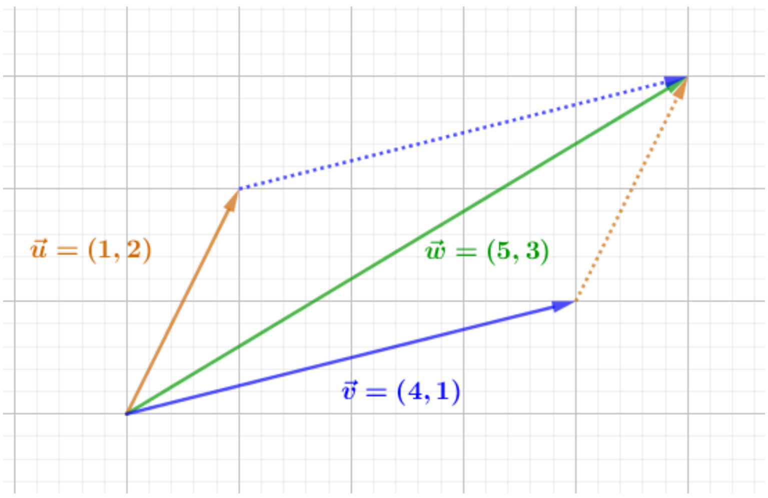


Imagen 21

Como vemos en la Imagen 21 el vector $\vec{w}$ es equivalente a $\vec{u} + \vec{v}$, es decir, parten del mismo punto y llegan a un mismo final. Podemos escribir $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, las operaciones que definen esta suma se pueden deducir nuevamente del dibujo, vemos como se cumple que $w_x = u_x + v_x$ y $w_y = u_y + v_y$. Por lo tanto, la operación suma queda definida como la suma de coordenadas. Veamos si la resta cumple las mismas propiedades, podemos escribir $\vec{w}' = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$, gráficamente obtenemos el esquema de Imagen 22:

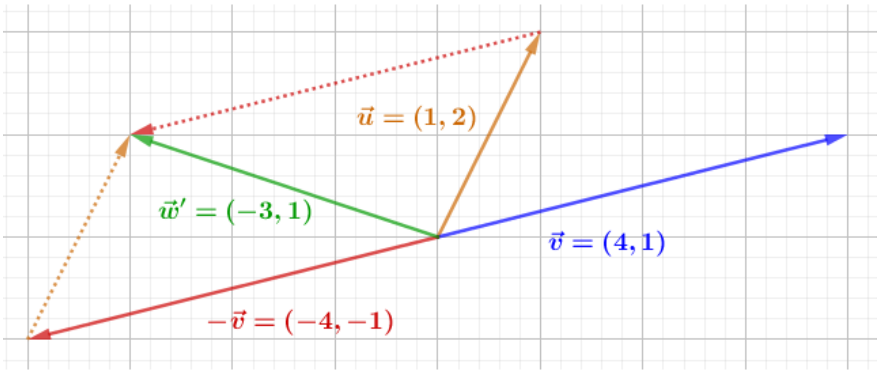


Imagen 22

Por lo que queda comprobado que $\vec{w}' = \vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$, al igual que en la suma.

TG6. Justificación de T6 (punto medio)

De nuevo el razonamiento va a tener un carácter geométrico. Se espera que el alumnado resuelva P4 pero no que obtengan una técnica y una justificación adecuada para la misma. Será el docente el encargado de estas dos últimas tareas. Se adjunta a continuación una de las posibles justificaciones para el punto medio.

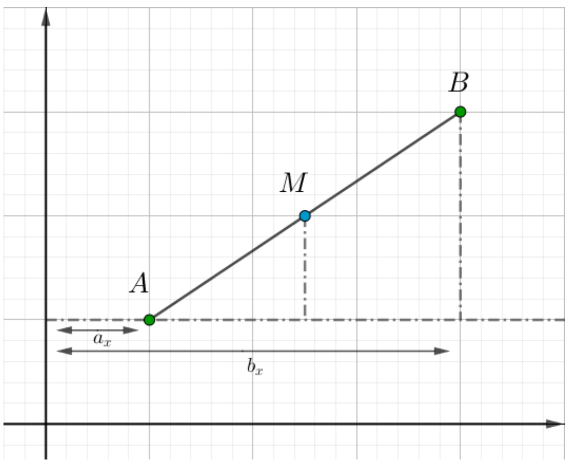


Imagen 23

En la figura aparecen los puntos $A(a_x, a_y)$ y $B(b_x, b_y)$, cuyo punto medio es $M(m_x, m_y)$. De la figura se deduce

$$m_x = a_x + \frac{b_x - a_x}{2},$$

simplificando obtenemos

$$m_x = \frac{a_x + b_x}{2}.$$

El razonamiento para la coordenada y es análogo, de forma que obtenemos la siguiente expresión para el punto medio:

$$M = \left(\frac{a_x + b_x}{2}, \frac{a_y + b_y}{2}\right)$$

TG7. Justificación de T7 (paralelismo entre vectores).

El razonamiento para justificar esta técnica se basa en el concepto de proporcionalidad. Si un vector es paralelo a otro quiere decir que tienen la misma “inclinación”, es decir, la razón entre la coordenada y y la coordenada x toma el mismo valor para ambos vectores. Esto se traduce en que los vectores son proporcionales y que se cumplen igualdades del tipo $u_x/v_x = u_y/v_y$. Se pretende que esta técnica sea de nuevo justificada por el alumnado a través del estudio de P5.1, los alumnos se deberán dar cuenta de que dos vectores son paralelos únicamente cuando sus coordenadas son proporcionales, a partir de ahí no les resultará difícil deducir T7 pues llevan varios años trabajando con magnitudes proporcionales.

TG8. Justificación T8 (producto escalar)

Justificar esta técnica requiere un razonamiento más elaborado por lo que será el profesorado quien lo ofrezca, en este caso el razonamiento tendrá un carácter más algebraico. Se espera que algún alumno resuelva el P5.2, obteniendo una solución concreta para el enunciado. El objetivo de esta justificación es generalizarlo a cualquier par de vectores.

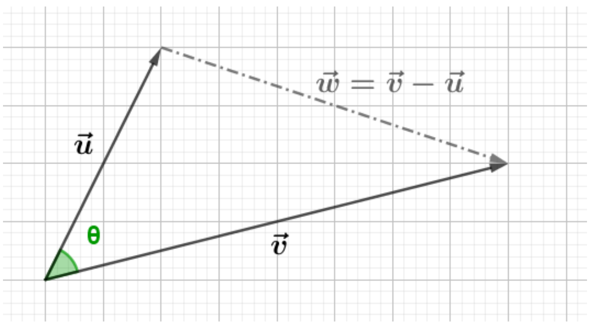


Imagen 24

El ángulo θ que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ puede calcularse generando un vector $\vec{w} = (v_x - u_x, v_y - u_y)$ y aplicando el teorema del coseno. El teorema del coseno nos dice que $|\vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$, podemos escribirlo como:

$$(v_x - u_x)^2 + \left(v_y - u_y\right)^2 = u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

Simplificando obtenemos:

$$u_x v_x + u_y v_y = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta,$$

que es la expresión del producto escalar.

G.2 Implementación en el aula

Las tecnologías deberán introducirse durante el proceso de institucionalización tal y como se indica en el apartado F.3. Podemos distinguir dos tipos de justificaciones: el primer tipo (tipo 1) son las justificaciones obtenidas por el alumnado mediante la resolución de un campo de problemas; el segundo tipo (tipo 2), son las justificaciones que da el docente. Cuando las justificaciones sean de tipo 1 se deberá indicar durante el proceso de institucionalización y, si es necesario, repetirlas. Podemos agrupar las tecnologías en estos dos tipos:

Tipo 1	TG2, TG3, TG7
Tipo 2	TG4, TG5, TG6, TG8

Tabla 2

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

Las sesiones que se detallan a continuación están pensadas para una clase ordinaria de duración 50 minutos, en concreto, se proponen 13 sesiones incluyendo la prueba escrita. Se adjunta la Tabla 3 donde se indican los campos de problemas, técnicas, ejercicios y tecnologías que se trabajan en cada sesión.

A continuación se van a desarrollar brevemente cada una de las sesiones. El "bloque central" de sesiones (3-9) seguirá la metodología propuesta en el apartado F.3, es decir, se trabajará siguiendo el orden: 1. Planteamiento y trabajo de los problemas pertenecientes a un campo concreto (trabajo individual o en pequeños grupos y breve debate posteriormente). 2. Enseñanza de la técnica (o técnicas) que resuelven los problemas y resolución "formal" de los mismos. 3. Justificación teórica de la técnica. 4. Práctica de la técnica mediante ejercicios

Sesión	Nombre	Campo de problemas	Técnicas	Ejercicios	Tecnologías	Otros
1	Actividades previas					AI1 y AI2
2	Actividades introductorias					PI1 y PI2
3	Representación gráfica	CP1 (P1.1 y P1.2)	T1	E1.1 y E1.2		
4	Determinar vectores	CP2 (P2)	T2	E2	TG2	
5	Operaciones con vectores I	CP3 (P3.1)	T3	E3	TG3	
6	Operaciones con vectores II	CP3 (P3.2)	T4 y T5	E5	TG4 y TG5	
7	Punto medio	CP4 (P4)	T6	E6	TG6	
8	Paralelismo y perpendicularidad	CP5 (P5.1 y P5.2)	T7	E7	TG7	
9	Producto escalar	CP5(P5.3)	T8	E8.1 y E8.2	TG8	
10	Problemas finales	CP6 (P6.1 y 6.2)	T2, T7 y T6			
11	Sesión de repaso					
12	Prueba escrita	Examen del apartado I.1				
13	Entrega de resultados					

Tabla 3

Sesión 1. Actividades previas

Como se indica en el apartado C, esta sesión contiene actividades que sirven tanto para recordar conceptos necesarios para abordar el objeto matemático vector como para realizar una breve evaluación inicial de los conocimientos que poseen los alumnos. La metodología que se seguirá durante esta sesión es la que indica C.2.

Sesión 2. Actividades introductorias

En esta sesión se realizarán los dos problemas propuestos en el apartado D.3, el objetivo es trabajar las razones de ser de los vectores. Tal y como se indica en el apartado D.4, se realizarán los dos problemas en los primeros 35 minutos de clase (aproximadamente) posteriormente, el docente definirá e institucionalizará el vector.

Sesión 3. Representación gráfica

Esta sesión es la primera donde se aplica la metodología que aparece en F.3. Los alumnos trabajarán en primer lugar el problema P1.1 (entendiendo por "trabajar" el hecho de seguir los cuatro pasos mencionados anteriormente). Posteriormente, se enfrentarán a P1.2. Este último problema únicamente sirve para estudiar las propiedades de los vectores (dirección, sentido y módulo), por tanto, no hay técnicas que lo resuelvan ni ejercicios de práctica. La metodología a seguir para trabajar P1.2 es simple, una vez los alumnos hayan obtenido alguna especie de clasificación, se les presentarán las propiedades de los vectores.

Sesión 4. Determinar vectores

En esta sesión se introducirá la técnica que permite calcular un vector mediante dos puntos, al igual que en la sesión anterior y en las posteriores (hasta la 9) se seguirá la "metodología F.3".

Sesión 5. Operaciones con vectores I

Esta sesión va enfocada al estudio del módulo de un vector.

Sesión 6. Operaciones con vectores II

Esta sesión va dirigida al estudio del producto por un escalar y a la suma de vectores. Ambas técnicas aparecen en un mismo problema (P3.2), de igual modo se trabajan mediante un mismo ejercicio (E5). No obstante, las justificaciones teóricas son diferentes y se debe prestar atención a las dos por igual.

Sesión 7. Punto medio

En esta sesión se introducirá la técnica que permite calcular el punto medio. Como se ha dicho anteriormente, los alumnos serán quienes justifiquen esta técnica. Habrá que prestar especial atención, pues considero que es más compleja que el resto de técnicas que deben deducir ellos mismos, quizás haya que guiarlos en algún momento.

Sesión 8. Paralelismo y perpendicularidad.

Esta sesión difiere un poco de la “metodología F.3”, en primer lugar, se trabajará P5.1 siguiendo esta metodología al pie de la letra e introduciendo la técnica para comprobar si dos vectores son paralelos. Posteriormente, se trabajará P5.2. A este problema no le asociaremos ninguna técnica (de momento), el único objetivo es suscitar un debate acerca de qué condiciones deben cumplir dos vectores para que sean perpendiculares. La clase finalizará con las conclusiones de este debate (no se mencionará el producto escalar).

Sesión 9. Producto escalar

Se empezará la sesión trabajando el problema P5.3. Una vez se explique la técnica que lo resuelve (producto escalar) y antes de pasar a la justificación teórica, se hará hincapié en el problema de la sesión anterior (P5.2), asociando el producto escalar a los criterios de perpendicularidad. Es decir, el producto escalar se presentará como una técnica que sirve para calcular el ángulo entre dos vectores y, consecuentemente, como un criterio efectivo para comprobar si dos vectores son perpendiculares.

Sesión 10. Problemas finales

En esta sesión ya no se sigue la “metodología F.3” se trabajarán los problemas P6.1 y P6.2 mediante el acervo de técnicas que los alumnos han adquirido a lo largo de las sesiones anteriores. Si dos problemas se consideran insuficientes, se deja en manos del docente incluir más del “estilo” de estos.

Sesión 11. Sesión de repaso

Esta clase se reserva para que los alumnos presenten cualquier tipo de duda relacionada con el objeto matemático vector. En el caso de que los alumnos traigan pocas dudas, el docente propondrá varios problemas pertenecientes a CP6.

Sesión 12. Prueba escrita

En esta sesión se realizará la prueba escrita que se presenta en el siguiente apartado.

Sesión 13. Entrega de los resultados

Esta sesión se reserva para comentar las pruebas realizadas por los alumnos, el objetivo de esta sesión es que el proceso de evaluación no sea únicamente calificativo sino también formativo.

I. Sobre la evaluación

En este apartado se va a diseñar una prueba escrita, analizando los campos de problemas, técnicas y tecnologías que evalúa cada pregunta. Se propone un sistema de calificación y, por último, se diseña la metodología a seguir durante la sesión 13 para que el proceso de evaluación sea formativo.

I.1. Prueba escrita

1. Un equipo de baloncesto está practicando una jugada para cuando quieran anotar un triple, las posiciones de los jugadores son las que aparecen en la siguiente imagen:

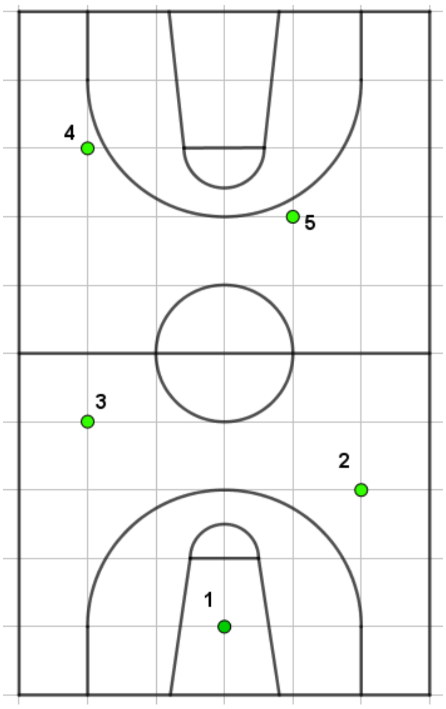


Imagen 25

La *jugada 1* consiste en realizar los pases 1 → 3 → 4. La *jugada 2* consiste en realizar los pases 1 → 2 → 5.

a) Para cada jugada, dibuja los vectores que representan los pases de pelota, ponles nombre y escríbelos de forma numérica.

b) Determina en qué jugada la pelota realiza un menor recorrido.

2. Los puntos $A(0,4)$ y $B(-1,0)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo del que sabemos que las diagonales se cortan en $M(2,1)$. Halla las coordenadas de los otros dos vértices del paralelogramo.

3. Dibuja el cuadrilátero de vértices $A(-3,-2)$, $B(-2,3)$, $C(3,5)$ y $D(6,1)$ y comprueba si es un trapecio (tiene dos lados paralelos). Si no es así, rectifica el punto D para que lo sea.

4. Un río sigue la dirección (-1,1). Se quiere construir un puente que mide 4m de largo para cruzarlo, por motivos de construcción, el puente debe ser perpendicular al rio. Determina un vector que represente este puente.

5. Los vértices de un rombo son $A(1,-2)$, $B(2,1)$, $C(5,2)$ y $D(4,-1)$.

a) Calcula la longitud de sus diagonales.
b) Calcula los cuánto valen los dos ángulos que se pueden distinguir en el rombo.

I.2 Modelo de calificación

El modelo de calificación que se va a utilizar para corregir esta prueba es el propuesto por Gairín, Muñoz y Oller (2012). Este sistema propone una evaluación a "tercios" y se basa en que los exámenes de matemáticas exigen al alumno la realización de tareas de distinta naturaleza que, esencialmente, se dividen en tres:

Tareas principales: Son aquellas tareas que claramente constituyen el objetivo principal de la calificación: valorar la comprensión del alumno sobre los contenidos matemáticos propios de los temarios de matemáticas de un curso determinado. A su vez, estas tareas también pueden distinguirse atendiendo a su carácter conceptual o procedimental.

Tareas auxiliares: En el proceso de resolución del problema también hay que realizar otro tipo de tareas, que denominamos tareas auxiliares, con la finalidad de obtener las informaciones necesarias para dar la respuesta al problema. Identificamos dos grandes grupos de tareas auxiliares: las específicas y las generales.

<u>Tareas auxiliares específicas:</u> Son aquellas tareas que juegan un papel instrumental para alcanzar la solución de un problema en el que aparecen tareas

> principales sobre contenidos específicos. Por ejemplo, para calcular los extremos relativos de una función, la obtención de derivadas es una tarea auxiliar específica.
>
> Tareas auxiliares generales: Consideramos como tareas auxiliares generales de un determinado curso de matemáticas a todo tipo de tareas matemáticas que ha realizado el alumno a lo largo de su formación matemática anterior. Atendiendo a su naturaleza, estas tareas podrían dividirse en tareas de tipo algebraico, de tipo aritmético, de tipo geométrico, de tipo gráfico y de representación. (Gairín, Muñoz y Oller, 2012, p. 269)

En base a esta escisión de tareas, proponen el modelo de penalización de errores que aparece en Imagen 26 y lo denominan “modelo de tercios”.

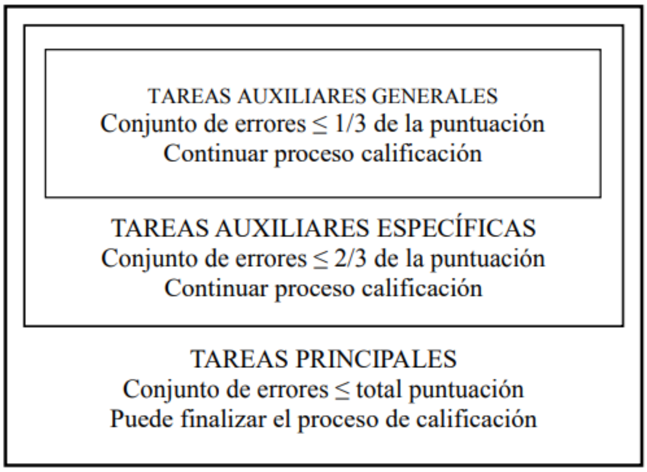


Imagen 26

Es decir, este modelo se basa en limitar las penalizaciones del corrector en función del tipo de tarea en el que se falla. Si el alumno falla en una tarea auxiliar general, podrá ser penalizado, como máximo, en 1/3 de la puntuación total. Si falla en una tarea auxiliar específica, podrá ser penalizado con 2/3 de la calificación total. Por último, si falla en la tarea principal, puede ser penalizado hasta el 100% de la calificación. En el caso de que en un mismo problema aparezcan varias tareas principales, deberán asignarse puntuaciones diferenciadas a cada una de ellas.

En base a esta propuesta, se indicará en los apartados siguientes cuál es la tarea principal, la auxiliar general y la auxiliar específica para cada problema a evaluar.

I.3 Análisis de los problemas

En este apartado se van a señalar las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales que componen cada problema. En primer lugar, se muestra la Tabla 4 donde se recogen los campos de problemas y técnicas que abarca cada problema, a continuación, se presenta el análisis del los problemas uno a uno. No se señalan los posibles errores, pues considero que se hace de forma implícita al señalar los tipos de tareas, es decir, un posible error sería fallar en la tarea auxiliar específica del segundo problema.

Retomando lo dicho en el apartado E, podemos entender CP6 como una "continuación" de los campos anteriores cuya finalidad es propiciar el estudio profundizado que no se da en los mismos. Por tanto, resulta absurdo, a la hora de plantear una prueba escrita, discernir entre el CP6 y el resto de campos. Obviaremos CP6 a partir de este párrafo.

Problema	Campos de problemas	Técnicas
1	CP1 y CP3	T3 y T5
2	CP4	T6
3	CP2 y CP5	T7 y T2
4	CP3 y CP5	T3 y T8
5	CP3 y CP5	T3 y T8

Tabla 4

PROBLEMA 1

Tareas constituyentes

Tareas principales:

- Determinar los vectores que representan los pases (tanto gráfica como numéricamente, es decir, utilizar T1).
- Determinar la jugada en la que el recorrido de la pelota es menor.

Tareas auxiliares específicas:

- Utilizar T3.
- Utilizar T5.

Tareas auxiliares generales: Las propias operaciones aritméticas que se derivan de aplicar T3 y T5.

Posibles respuestas

Para el apartado *a)* existe una única respuesta, los alumnos deben dibujar los vectores y después escribirlos numéricamente. Ahora bien, en el apartado *b)* aparecen dos posibles respuestas. La primera es que obtengan el vector resultante aplicando T5 de forma aritmética, es decir, sumando las coordenadas una a una. La otra opción es que obtengan el vector resultante dibujándolo directamente en el "campo" de baloncesto. Ambas procesos son igualmente válidos, una vez obtengan el vector resultante deberán aplicar T3.

PROBLEMA 2

Tareas constituyentes

<u>Tareas principales:</u> La tarea principal que constituye este problema es determinar los puntos C y D siendo el alumno consciente de que debe utilizar T6.

<u>Tareas auxiliares específicas:</u> Conocer T6 y aplicarla correctamente.

<u>Tareas auxiliares generales:</u> Realizar los cálculos algebraicos necesarios para determinar los puntos C y D.

Posibles respuestas

En este problema solo existe una vía para obtener la solución. Esta vía es darse cuenta de que M es el punto medio del segmento $\overline{AC}$ y del segmento $\overline{BD}$. Una vez se hayan dado cuenta, deben aplicar correctamente T6 (técnica para obtener el punto medio).

PROBLEMA 3

Tareas constituyentes

<u>Tareas principales:</u>

- Comprobar si el cuadrilátero es un trapecio (mediante un razonamiento adecuado, determinar $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ y comprobar si son paralelos mediante T6).
- Corregir el punto D, de nuevo mediante T6

<u>Tareas auxiliares específicas:</u>

- Situar puntos en el plano coordenado.
- Aplicar correctamente T2.
- Aplicar correctamente T6.

<u>Tareas auxiliares generales:</u> Procesos aritméticos y algebraicos que conlleva la resolución del problema.

Posibles respuestas

De nuevo, únicamente existe un método a seguir. Para comprobar si el cuadrilátero es un trapecio se deben determinar los vectores que lo componen (mediante T2) y comprobar si alguna pareja es paralela (mediante T6). Posteriormente, se debe corregir el punto D.

PROBLEMA 4

Tareas constituyentes

Tareas principales: Hallar un vector de módulo 4 y dirección perpendicular a (1,1).

Tareas auxiliares específicas: Conocer y aplicar T3 y T8.

Tareas auxiliares generales: Errores algebraicos al resolver el sistema de ecuaciones.

Posibles respuestas

En este problema aparece una única estrategia de resolución, esta es: plantear un sistema de ecuaciones que englobe T3 y T8 incorporando las condiciones que plantea el problema (módulo 4 y dirección perpendicular a (-1,1)

PROBLEMA 5

Tareas constituyentes

Tareas principales: En el caso del apartado *a* la tarea principal es relacionar la distancia entre dos puntos con el módulo de un vector. En el caso de *b*, es relacionar el cálculo de los ángulos con el producto escalar.

Tareas auxiliares específicas: Distinguimos una tarea específica para cada apartado. En *a* es el conocimiento y utilización de T3 mientras que en *b* es el conocimiento y utilización de T8. En ambos casos se debe aplicar correctamente T2 (obtener un vector dados dos puntos).

Tareas auxiliares generales: Las tareas auxiliares son las operaciones aritméticas que surgen de manipular T3 y T8.

Posibles respuestas

Para este problema únicamente existe una posible resolución. En el apartado *a* es obtener los vectores que representan las diagonales y calcular su módulo. En el segundo, es obtener los vectores que forman el rombo y calcular sus ángulos mediante el producto escalar.

I.4 Guía de corrección

La metodología que se propone para calificar es la siguiente: asignar 10 puntos a cada problema del examen y dividirlos entre en número de tareas principales que aparezcan en dicho problema; para cada tarea principal, relacionar las tareas auxiliares que le corresponden de entre las mencionadas anteriormente (por ejemplo, en el problema 1, la tarea principal del apartado *a* no se relaciona con ninguna tarea auxiliar, sin embargo, si lo hace la tarea principal del apartado *b*). Cada tarea principal será evaluada mediante el modelo de tercios (volviendo al ejemplo del problema 1, si se falla, por ejemplo, en una tarea auxiliar específica relacionada con la tarea principal del apartado b, se penalizara como máximo con 2/3 de la calificación que le corresponde a esa tara principal, en este caso, 2/3 de 5 puntos). Finalmente, se hará la media aritmética de las calificaciones de todos los problemas.

I.5 Evaluación formativa

Este apartado se centra en la función pedagógica del proceso de evaluación. El objetivo es diseñar una serie de actividades para fomentar el aprendizaje del alumnado a lo largo del proceso de evaluación, dejando de lado el concepto de evaluación como un proceso meramente calificativo.

Las autoras Rochera, Colomina y Barberá (2001) distinguen tres tipos de actividades distintas en torno a la evaluación.

- *Actividades de corrección:* actividades o momentos dirigidos a corregir y calificar la tarea de evaluación.
- *Actividades de comunicación:* actividades o momentos dirigidos a transmitir a los alumnos los resultados de la prueba.
- *Actividades de aprovechamiento:* actividades o momentos dirigidos a explotar y aprovechar pedagógicamente los resultados de la prueba.

Además, las autoras dan una serie de pautas a seguir para optimizar el aprendizaje en cada una de estas actividades. En cuanto a las *actividades de corrección*, afirman que:

> Se promueve el uso pedagógico de la evaluación cuando, además de aplicar criterios de corrección sobre las tareas y contenidos de la prueba escrita, se toman en consideración aspectos tan fundamentales para la regulación del

> aprendizaje como el esfuerzo dedicado y los procedimientos de estudio utilizados por los alumnos en la preparación de la prueba. (Rochera, Colomina y Barberá, 2001, p. 42)

En cuanto a las *actividades de comunicación* sostienen que:

> Se impulsa el valor pedagógico de la evaluación en tanto se comunican los criterios utilizados con anterioridad a la devolución de los resultados; y en la medida en que se procede a una devolución no sólo individual y privada, sino también grupal y pública de los resultados globales de la prueba escrita. (Rochera, Colomina y Barberá, 2001, p. 42)

Finalmente, respecto a las *actividades de aprovechamiento* señalan:

> Se fomenta el uso pedagógico de la evaluación en la medida en que estas se dirigen fundamentalmente a la resolución conjunta de las tareas erróneas, asegurando la adecuación de los significados construidos sobre todos los contenidos de la evaluación. Y también se fomenta dicho uso cuando se promueve la reflexión conjunta sobre las estrategias de estudio utilizadas durante el proceso de preparación de la prueba escrita, sobre las estrategias de resolución utilizadas en su realización y sobre cómo mejorar el estudio y el aprendizaje futuros. (Rochera, Colomina y Barberá, 2001, p. 42)

En base a lo citado anteriormente se van a desarrollar las sesiones que comprenden la evaluación formativa, estás serán la sesión 11 (sesión previa a la prueba) y la sesión 13 (entrega de los resultados).

Sesión 11. Clase de repaso

Tal y como se indica en el apartado anterior, esta sesión se reserva para resolver las dudas que los alumnos puedan tener a cerca de los contenidos de la prueba escrita. (Reservamos aproximadamente 40 minutos para esta parte).

En base a lo citado anteriormente y con el objetivo de promover la evaluación pedagógica, se comunicará a los alumnos los criterios de evaluación que se aplicarán en la corrección de la prueba escrita. Es decir, les explicaremos brevemente el modelo de tercios señalando las diferencias entre tareas principales y auxiliares. Asimismo, se destacará que mediante este modelo los fallos aritméticos que puedan cometer carecen de importancia, deben centrar su atención en comprender los contenidos relacionados con el objeto matemático vector. Podemos catalogar esta última actividad como *actividad de comunicación.*

Corrección de la prueba

El docente corregirá las pruebas fuera del aula, deberá corregir los ejercicios cuantitativamente aplicando el modelo de tercios tal y como se indica en los apartados anteriores. Además, deberá introducir un comentario cualitativo en cada prueba para fomentar la evaluación formativa. El objetivo de estos comentarios es dar un *feedback* al alumno además de la propia calificación. Esta práctica se engloba dentro de las *actividades de corrección*.

Sesión 13. Entrega de los resultados

Reservaremos los primeros 5 minutos de esta sesión para hacer un breve comentario general sobre cómo ha ido la prueba, por ejemplo, en qué ejercicio ha habido más fallos, cuál ha salido mejor, etc. (*Actividad de comunicación* grupal)

Los siguientes 5 minutos el docente repartirá las pruebas corregidas, los alumnos verán tanto las calificaciones cuantitativas como los comentarios cualitativos. (*Actividad de comunicación* individual).

Posteriormente, se pasará a la corrección problema a problema. La metodología que se seguirá será la siguiente: un alumno (voluntario o elegido por el profesor) leerá la tarea y la resolverá de forma individual en la pizarra, el resto de alumnos comprobarán el proceso de resolución. Una vez resuelto el problema, el docente preguntará quién se ha equivocado y dónde. Finalmente, comentará los errores generales que él ha identificado. Asimismo, se pedirá a los alumnos que identifiquen la tarea (o tareas) principal del problema. Este proceso se repetirá para cada problema de la prueba escrita. (*Actividad de aprovechamiento*)

Finalmente, y si el tiempo lo permite, el docente abrirá un breve debate en torno a las técnicas de estudio. El objetivo es que los alumnos compartan entre sí las técnicas que utilizan de modo que el docente pueda intervenir y señalar cuáles son las más adecuadas para el estudio concreto del objeto matemático vector. (*Actividad de aprovechamiento*)

Se mandará a modo de tarea para casa que los alumnos rehagan los problemas donde hayan obtenido una calificación inferior a 5 (lo que demuestra fallos en las tareas auxiliares específicas y/o generales). (*Actividad de aprovechamiento*).

J. Sobre la bibliografía y páginas web

Bosch, M. y Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias, 12 (3),* 314-332.

Gairín, J. M., Muñoz, J.M. y Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. *En Investigación en Educación Metemática XVI*, 261-274. Jaén: SEIEM.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *RELIME, 4 (2),* 129-160.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética y analítica en Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *SUMA, 39,* 13-25.

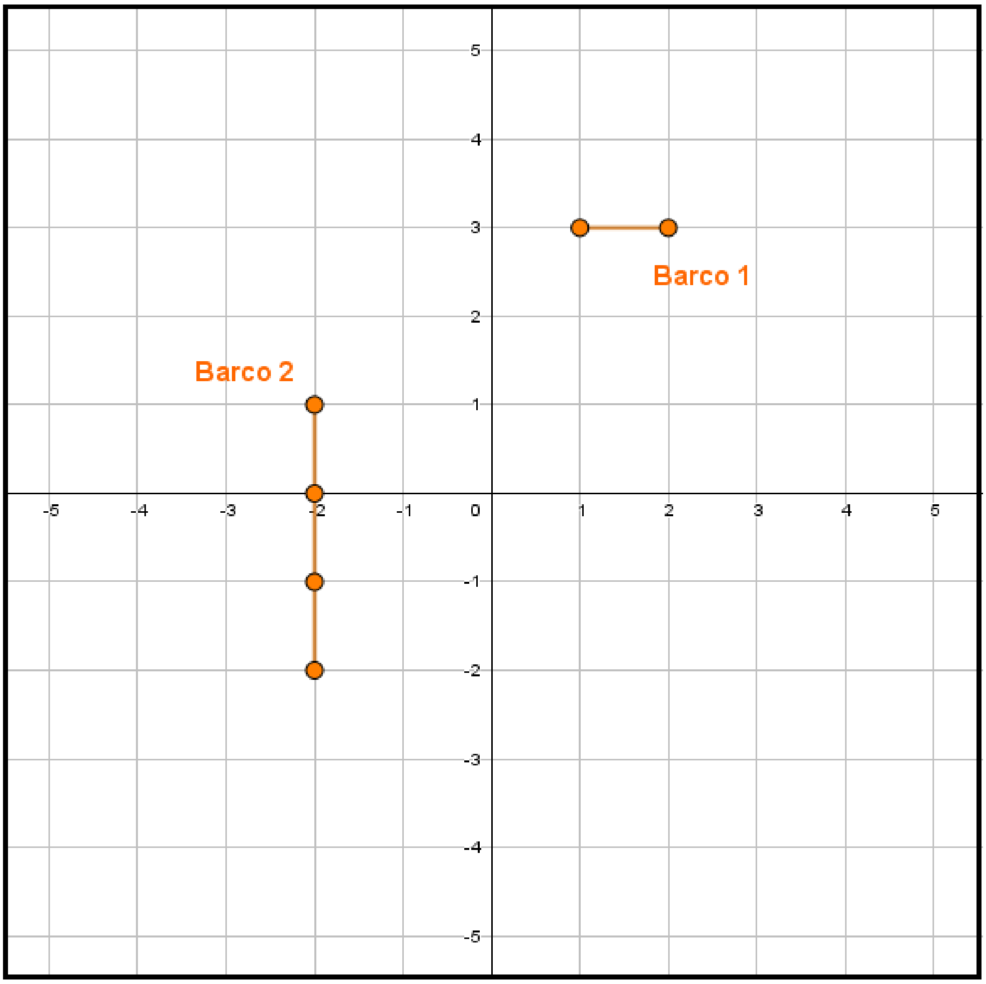
Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria. I Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *SUMA, 44*, 25-34.

Rochera, M. J., Colomina R. y Barberá, E. (2001). Optimizar los aprendizajes de los alumnos a partir de los resultados de la evaluación en Matemáticas. *Investigación en la escuela, 45,* 33-44.

Zea, C. A. (2012). *La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático* (Tesis doctoral). Universidad del Valle.

Anexos

Tablero (AI1)



Cuestionario geométrico (AI2)

1. *Un triángulo con dos lados iguales no puede ser rectángulo.*
    - a) *Verdadero*
    - b) *Falso*
2. *Un triángulo tiene dos lados iguales y el ángulo que forman estos dos lados mide 60º. Estamos ante un triángulo:*
    - a) *Equilátero*
    - b) *Isósceles*
    - c) *Escaleno*
3. *El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos…*
    - a) *En todos los triángulos*
    - b) *En los triángulos rectángulos*
    - c) *En los triángulos escalenos*
4. *Los paralelogramos se caracterizan por tener…*
    - a) *Los cuatro lados iguales*
    - b) *Los lados paralelos dos a dos*
    - c) *Los cuatro ángulos iguales*
5. *Los trapecios son un tipo de paralelogramo.*
    - a) *Verdadero*
    - b) *Falso*
6. *Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio de ambas.*
    - a) *Verdadero*
    - b) *Falso*
7. *Un cuadrilátero con los cuatro lados iguales es…*
    - a) *Un cuadrado*
    - b) *Un rombo*
    - c) *Ambas son correctas*
8. *Todos los puntos de una circunferencia equidistan del centro.*
    - a) *Verdadero*
    - b) *Falso*
9. *Si una recta comparte un único punto con una circunferencia se le llama…*
    - a) *Recta exterior a la circunferencia*
    - b) *Recta tangente a la circunferencia*

c) Recta secante a la circunferencia

10. *Cuando dos circunferencias son tangentes sus centros y el punto de tangencia están alineados.*

    a) Verdadero

    b) Falso

11. *El coseno de un ángulo viene determinado por la razón…*

    a) Cateto adyacente / hipotenusa

    b) Hipotenusa / cateto adyacente

    c) Cateto opuesto / cateto adyacente

12. *Las razones trigonométricas son independientes de la longitud de los lados.*

    a) Verdadero

    b) Falso

13. *El teorema del coseno viene dado por la expresión*

    a) $\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)}$

    b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot cos(\alpha)$

    c) Ninguna de las dos es correcta

14. *El teorema del coseno nos permite calcular cualquier ángulo de un triángulo conocidos todos sus lados*

    a) Verdadero

    b) Falso